

# BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND



U. Jaekel  
3/19/04  
Q 80573  
10f1

## Prioritätsbescheinigung über die Einreichung einer Patentanmeldung

**Aktenzeichen:** 103 13 139.6  
**Anmeldetag:** 24. März 2003  
**Anmelder/Inhaber:** NEC Europe Limited,  
Sankt Augustin/DE  
**Bezeichnung:** Verfahren zur Bestimmung der Position eines  
Objekts  
**IPC:** G 06 F 17/00

**Die angehefteten Stücke sind eine richtige und genaue Wiedergabe der ur-  
sprünglichen Unterlagen dieser Patentanmeldung.**

München, den 08. Mai 2003  
**Deutsches Patent- und Markenamt**  
**Der Präsident**  
**Im Auftrag**

**Dzierzon**

4623/P/008

Heidelberg, den 24. März 2003/kb/

## Patent anmeldung

der Firma

NEC Europe Limited  
Rathausallee 10

53757 Sankt Augustin

betreffend ein

**"Verfahren zur Bestimmung der Position eines Objekts"**

Die Erfindung betrifft ein Verfahren zur Bestimmung der, insbesondere zukünftigen, Position eines Objekts, insbesondere eines Teilchens oder dergleichen, wobei der Positionsverlauf eines Referenzobjekts bestimmt wird, wobei das Referenzobjekt einen Prozess durchläuft und wobei die Differenzen der Positionen des Objekts und des Differenzobjekts gebildet werden.

In vielen physikalischen und in verschiedenen technischen Systemen ist es notwendig die Position, insbesondere die zukünftige Position, eines Objekts zu kennen, um beispielsweise Schäden zu vermeiden, die dadurch entstehen, dass das Objekt sich in einer Position befindet, in der ein solcher Schaden verursacht wird. Zur Bestimmung der Position sind hierbei verschiedene Verfahren bekannt, bei denen der Positionsverlauf eines Referenzobjekts bestimmt und die Differenzen der Positionen des Objekts und des Referenzobjekts gebildet werden. Bei dem Referenzobjekt handelt es sich hierbei um ein Referenzobjekt, dessen Dynamik gut bestimmbar ist. Bei den bekannten Verfahren ist insgesamt problematisch, dass diese oftmals nur unzureichende Ergebnisse liefern, da die zur Bestimmung der Position verwendeten Methoden nur mit einem technisch sehr hohem Aufwand genaue Ergebnisse liefern. Steht dieser technische Aufwand nicht zur Verfügung, so sind die Ergebnisse oftmals nicht brauchbar.

Der vorliegenden Erfindung liegt daher die Aufgabe zugrunde, ein Verfahren zur Bestimmung der Position eines Objekts der eingangs genannten Art anzugeben, bei dem eine gute Bestimmung der Position des Objekts bei gleichzeitig möglichst geringem technischen Aufwand ermöglicht ist.

Erfnungsgemäß wird die voranstehende Aufgabe durch das Verfahren zur Bestimmung der Position eines Objekts mit den Merkmalen des Patentanspruchs 1 gelöst. Danach ist das in Rede stehende Verfahren zur Bestimmung der Position eines Objekts derart ausgestaltet und weitergebildet, dass aus den Differenzen Fehlpositionsterme gebildet werden und dass die Fehlpositionsterme mit mindestens einem Korrekturfaktor gewichtet werden.

In erfindungsgemäßer Weise ist erkannt worden, dass durch die Einführung von gewichteten Fehlpositionstermen in besonders einfacher Art und Weise der technische

Aufwand, so beispielsweise der Rechenaufwand bei Simulationen, gering gehalten werden kann.

Hinsichtlich einer besonders einfachen Ausgestaltung könnten die mit dem Korrekturfaktor gewichteten Fehlpositionsterme aufaddiert werden. Somit wäre ein Korrekturfaktor gegeben, der besonders einfach ermittelbar ist und außerdem eine gute Korrekturleistung aufweist. Der Korrekturfaktor könnte in weiter vorteilhafter Weise durch einen adjungierten Prozess berechnet werden. Bei dem adjungierten Prozess könnte es sich hierbei um einen Prozess handeln, der in entgegengesetzter Zeitrichtung des Prozesses des Referenzobjekts verläuft. Im Rahmen einer besonders einfachen Ausgestaltung könnten zur Bestimmung der Position des Objekts die gewichteten und aufsummierten Fehlpositionsterme zu der Position des Referenzobjekts addiert werden.

Im Rahmen einer besonders einfachen Ausgestaltung könnte es sich bei dem Objekt auch um eine amerikanische Option und bei dem Referenzobjekt um die äquivalente europäische Option handeln. Bei der Position könnte es sich dann um den frühen Ausübungspreis, bei dem Fehlpositionsterm würde es sich in diesem Fall um den Fehlpreisterm und bei dem Korrekturfaktor um die Konstante handeln.

In erfindungsgemäßer Weise könnte dann für eine vorgegebene Optimierungs methode, beispielsweise der Monte-Carlo- oder der Finite-Differenz-Methode, der frühe Ausübungspreis berechnet werden, das heißt die Preisdifferenz zwischen amerikanischen und europäischen Optionen. Vorzugsweise könnte dies durch die Summierung eines Fehlpreisterms erreicht werden, der bereits durch die meisten Methoden berechnet wird. Dieser könnte in besonders vorteilhafter Weise durch eine Konstante gewichtet werden, die durch einen entsprechend ausgewählten adjungierten Prozess berechnet werden könnte. Der adjungierte Prozess könnte sich in weiter vorteilhafter Weise in entgegengesetzter Zeitrichtung des ursprünglichen Prozesses entwickeln, der die Preisentwicklung der europäischen Optionen bestimmt, wobei beispielsweise ein Entwicklungsparameter der formale Verknüpfungsoperator des europäischen Preisoperators sein könnte. Durch die Schätzung der Prämie für die frühzeitige Ausübung – Early Exercise Premium – könnte dann der Preis von amerikanischen Optionen einfach dadurch berechnet werden, dass er zum Preis der entsprechenden eu-

ropäischen Option addiert werden würde. Hierdurch könnten somit numerische Fehler in den mangelhaften Simulationsmethoden kompensiert werden und bessere Abschätzungen erreicht werden als bei den reinen numerischen Methoden, auf die das erfindungsgemäße Verfahren aufgesetzt wird. Dies erlaubt beispielsweise eine schnelle Simulation basierend auf den groben Gittern der Finite-Differenz-Methode. Es ist so auch möglich praktische Grenzen der zugrundeliegenden Methode zu überwinden und macht die Bewertung von komplexeren Optionen mit einer Vielzahl von Basiswerten durchführbar.

Das Verfahren ist insbesondere für die Schätzung von amerikanischen Standardoptionen mit einem einzigen Basiswert geeignet und besonders vorteilhaft einsetzbar als Zusatz zur Finite-Differenz-Methode und der Monte-Carlo-Methode. Die Realisierung erfolgt in weiter vorteilhafter Weise in Java.

Das Verfahren könnte auch auf verschiedenste, insbesondere regelungstechnische, gesteuerte oder ungesteuerte Prozesse anwendbar sein. In Bezug auf die bereits erläuterte Ausgestaltung bezüglich der Schätzung von Optionspreisen könnte der Preis einer europäischen Option ein ungesteuerter Prozess sein, da er unabhängig von äußeren Einflüssen des Inhabers ist. Bei der Bestimmung des Preises einer amerikanischen Option könnte es sich entsprechend um einen gesteuerten Prozess handeln, da in diesem Fall eine optimale Preisbestimmung erfolgen soll, d. h. das die Option ausgeübt werden könnte, sobald der Preis unter den inneren Wert der Option fällt. So lassen sich auch die weiteren Ausführungen ohne weiteres auf gesteuerte und ungesteuerte Prozesse anwenden und übertragen.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die Lehre der vorliegenden Erfindung in vorteilhafter Weise auszugestalten und weiterzubilden. Dazu ist einerseits auf die dem Patentanspruch 1 nachgeordneten Patentansprüche und andererseits auf die nachfolgende Erläuterung bevorzugter Ausführungsbeispiele des erfindungsgemäßen Verfahrens zur Bestimmung der Position eines Objekts anhand der Zeichnung zu verweisen. In Verbindung mit der Erläuterung der bevorzugten Ausführungsbeispiele des erfindungsgemäßen Verfahrens zur Bestimmung der Position eines Objekts anhand der Zeichnung werden auch im Allgemeinen bevorzugte Ausgestaltungen und Weiterbildungen der Lehre erläutert. In der Zeichnung zeigt

Fig. 1 ein Ausführungsbeispiel der Abhängigkeit einer amerikanischen Option bei einem risikolosen Zinssatz  $r = 0,1$ , der Volatilität  $\sigma = 0,4$ , dem Ausübungspreis  $E = \$ 10$ , wobei die Option in sechs Monaten abläuft,

Fig. 2 die Diskretisierung der Preise der Basiswerte sowie die zugelassen Übergänge für einen Zustand und

Fig. 3 ein weiteres Ausführungsbeispiel mit der Darstellung des Preises einer amerikanischen Put-Option auf einem groben Gitter mittels einer kleinen Anzahl von Übergangen (MC30) und durch Hinzufügen der adjunktiven Prozesskorrektur in der gleichen Simulation des geschätzten europäischen Optionspreises (APC) mit einer Volatilität  $\sigma = 0,4$ , einem Zinssatz  $r = 0,1$  und dem Ausübungspreis  $E = \$10$ .

Amerikanische Optionen unterscheiden sich von europäischen Optionen dadurch, dass sie jederzeit vor dem Ablauf der Option ausgeübt werden können, während diesen europäische Optionen nur an ihrem Fälligkeitsdatum ausgeübt werden können. Das Schätzen von amerikanischen Optionen ist daher weitaus schwieriger als das Schätzen von europäischen Optionen und erfordert speicher- und zeitintensive numerische Simulationen.

Es ist bekannt, dass amerikanische und europäischen Optionen unter bestimmten Voraussetzungen äquivalent sein können, beispielsweise für eine amerikanische Standard-Put-Option auf eine Aktie, für die keine Dividende ausgezahlt wird. Im Allgemeinen muss zur Berechnung eines angemessenen Preises für eine amerikanische Option in Betracht eine optimale Ausübungsstrategie zu jedem Zeitschritt gezogen werden, was analytische und numerische Berechnungen erheblich umfangreicher macht als im Falle der europäischen Optionen.

Die Schätzung von amerikanischen Optionen ist somit komplexer als die Schätzung von europäischen Optionen. In dieser Arbeit wird eine Formel entwickelt, die es erlaubt einen frühen Ausübungsoptionspreis berechnen, d.h. die Preisdifferenz zwischen den beiden Optionstypen im Hinblick auf einen adjunktiven Prozess, der sich

in der sich in der rückwärtigen Zeitrichtung des ursprünglichen Prozesses entwickelt, der die Entwicklung des Preises der Europäischen Optionen bestimmt. Diese Berechnung kann benutzt werden, um die Optionspreisschätzungen zu verbessern, die durch numerische Methoden, wie beispielsweise die der Finiten-Differenz- oder der Monte-Carlo-Methode, erhalten werden.

Es wird ein Verfahren entwickelt, das als Adjungierte Prozesskorrektur Methode – Adjoint Process Correction Method (APC) – bezeichnet wird, welches die Berechnung des Preises einer amerikanischen Option durch die Korrektur des Preises seines europäischen Äquivalent erlaubt. Es wird seine Zweckmäßigkeit durch die Anwendung der APC-Methode auf zwei verschiedene numerische Methoden zur Optionspreisberechnung gezeigt, nämlich die der Finiten-Differenzen und der stochastischen Simulation. Die letztere basiert auf einer Umformulierung einer Entwicklungsgleichung im Hinblick auf eine Mastergleichung und wird häufig in physikalischen Prozessen verwendet, um eine Vielzahl von sowohl stochastischen als auch deterministischen Phänomenen zu modellieren und zu simulieren. Anders als die Finite-Differenz-Methode kann die stochastische Simulation für praktisch jede bekannte Preisdynamik verwendet werden.

Die APC-Methode verwendet hierbei sowohl die bekannte Rückwärtsentwicklungs-gleichung als auch einen adjungierten Prozess, der vorwärts in Zeitrichtung abläuft. Die Preiskorrektur könnte somit als ein Integral über einen Quellterm ausgedrückt werden, der die Preisdiskrepanz zwischen den europäischen und den amerikanischen Rückwärtsentwicklungsoperatoren für infinitesimale Zeitschritte beschreibt, die durch den adjungierten Prozess gewichtet sind. Oftmals können die notwendigen Informationen über den adjungierten Prozess analytisch bestimmt werden. Wenn dies möglich ist, kann die APC-Methode besonders einfach und bei gleichzeitig geringfügigen Kosten als eine Erweiterung von konventionellen Methoden benutzt werden. In diesen Fällen kann die APC-Methode Informationen genau entwickeln, die anderenfalls durch Diskretisierung oder statistische Fehler gestört würden und kann somit bei nur geringfügig höherem Rechenaufwand genauere Ergebnisse als die einfache Finite-Differenz-Methode oder die Monte-Carlo-Methode liefern.

Ein weiterer Vorteil der APC-Methode ist, dass sie auf die relevanten Preiszonen fokussiert werden kann. Wenn beispielsweise der derzeitige Preis eines Optionsbasiswerts \$ 10 ist, ist der Optionspreis für \$ 20 nicht besonders interessant – aber im Allgemeinen wird die Finite-Differenz-Methode diesen Wert trotzdem angeben, genauso wie alle anderen Werte auf einem Feingitter zwischen \$ 10 bis \$ 20, da das \$ 20-Gebiet während der Rückwärtsrechnung der Endbedingungen von entscheidender Wichtigkeit sein könnte. Der adjungierte Prozess ermöglicht es, zwischen \$ 10 und \$ 20 ein vergleichsweise grobes Gitter zu verwenden und trotzdem sehr genaue Ergebnisse für den derzeitigen Preis durch die Verdichtung der Anfangsverteilung des adjungierten Prozesses bei \$ 10 zu erhalten. Für Optionen mit mehrfachen Basiswerten wächst die Komplexität des Problems exponentiell mit der Anzahl der Basiswerte, demnach muss für  $d$  Basiswerte ein  $d$ -dimensionaler Raum diskretisiert werden. Deshalb ist die Fähigkeit der APC Methode, auch bei groben Gittern gute Ergebnisse zu liefern, besonders vorteilhaft bei numerisch anspruchsvollen, höher dimensionalen Fällen.

Im numerischen Teil der Arbeit werden Ergebnisse für einen einzigen Basiswert gezeigt, der einer geometrischen Brown'schen Bewegung folgt, und wird mit dem Black-Scholes-Modell in der selbst-adjungierten Form gearbeitet. Hierbei ergeben sich allerdings keine Einschränkungen der APC-Methode an sich. Beispielsweise kann die stochastische Simulation auf komplizierte Prozesse generalisiert werden und Sprungprozesse können in einfacher Art und Weise integriert werden. Außerdem besteht keine Notwendigkeit für den Zeitentwicklungsoperator selbst-adjungiert zu sein. Im weiteren wird von einem stetigen Zeitverlauf ausgegangen und angenommen, dass die Entwicklung des europäischen Optionspreisvektors  $P$  wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \mathcal{L} P, \quad (1)$$

bestimmt wird, wobei die APC Methode in einfacher Art und Weise auf diskrete Zeitverläufe übertragen werden kann.

Zunächst wird gezeigt, wie der Preis von einer europäischen Option in der Art eines adjungierten Prozesses ausgedrückt werden kann. Dieses Ergebnis wird benutzt und

generalisiert auf den Fall einer amerikanischen Option, was zu der Korrekturformel führt, die in der APC-Methode benutzt wird. In einer ersten numerischen Anwendung wird gezeigt, dass die APC-Methode dazu verwendet werden kann, um Optionspreise durch die Finite-Differenz-Methode mit einem sehr groben Gitter zu berechnen und zu interpolieren. Eine alternative stochastische Methode wird dargestellt, die zeigt, dass die Optionspreisberechnung durch den adjungierten Prozess eine sinnvolle Preisschätzung ergeben kann, wenn die Statistik der zugrundeliegenden Monte-Carlo-Methode zu schlechte Ergebnisse liefert, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern.

Zu Beginn wird der Preis einer europäischen Option in der Art eines adjungierten Prozesses entwickelt sowie Definitionen und invariante Eigenschaften erläutert. Dieser Prozess wird zunächst definiert und eine erhaltene Quantität gefunden.

Bei einem adjungierten Prozess des Prozess  $P$  der Gleichung (1) ist ein Prozess gemeint, der durch die Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t} P^* = \mathcal{L}^* P^*, \quad (2)$$

definiert wird, wobei  $\mathcal{L}^*$  die formal Adjungierte des Operators mit dem Standard  $\mathcal{L}$ , Skalarprodukt, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\mathcal{L}\psi) dx \equiv \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L}^* \phi)\psi dx \quad (3)$$

für alle  $\psi, \phi$  im Definitionsbereich von  $\mathcal{L}$  beziehungsweise  $\mathcal{L}^*$  gilt. Es wird angenommen, dass alle  $\phi$  in dem Definitionsbereich  $\mathcal{L}^*$  stark abfallende Funktionen sind oder für einen endlichen Definitionsbereich gering im Grenzbereich verschwindend sind, um Probleme im Randbereich bei der partiellen Integration zu vermeiden. Insbesondere wird dies als Randbedingung für  $P^*$  vorausgesetzt. Wenn beispielsweise die Dynamik durch eine Advektionsdiffusionsgleichung durch  $\mathcal{L} = U\nabla + D\Delta$  bestimmt wird, ist der adjungierte Operator  $\mathcal{L}^* = -U\nabla + D\Delta$ , woraus ersehen werden kann, dass der Prozess selbst in der positiven entwickelnden Zeitrichtung eindeutig definiert ist, während der adjungierte Prozess in rückwärts entwickelnden Zeitrichtung eindeutig definiert ist. In der sich vorwärts entwickelnden Zeitrichtung ist die Lösung der adjungierten Prozessgleichung aufgrund der Anwesenheit des negativen Diffusi-

onsoperators eine schlecht lösbar Aufgabe. Entsprechend ist die zeitliche Zurückentwicklung für den ursprünglichen Prozess schlecht lösbar.

Mit diesen Definitionen ist das Skalarprodukt von  $P$  und  $P^*$  zeitlich invariant. Tatsächlich gilt wegen der Definition des adjungierten Operators in Gleichung (3) für irgendwelche Zeitpunkte  $T_1$  und  $T_2$ :

$$\begin{aligned}
 & \int dx \left( P(x, T_2) P^*(x, T_2) - P(x, T_1) P^*(x, T_1) \right) \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} dt \int dx \frac{\partial}{\partial t} \left( P(x, t) P^*(x, t) \right) \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} dt \int dx \left( P^*(x, t) \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + P(x, t) \frac{\partial}{\partial t} P^*(x, t) \right) \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} dt \int dx \left( P^*(x, t) \mathcal{L} P(x, t) - P(x, t) \mathcal{L}^* P^*(x, t) \right) \\
 &\equiv 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Anfangs- oder Endbedingungen für den adjungierten Prozess können nun in einer Art gewählt werden, die am Geeignetesten für das zu lösende Problem ist. Zu diesem Zweck wird

$$P^*(x, 0) = \delta(x - x_0) \tag{5}$$

gewählt, wobei  $x_0$  der Assetpreis ist, an dem die Option bewertet werden soll und  $\delta$  die  $d$ -dimensionale Dirac-Distribution ist. In vorteilhafter Weise könnte  $x_0$  als ein zusätzlicher Parameter eingeführt werden und könnte durch  $P^*(x, t; x_0)$  die Lösung des Anfangswertproblems der Gleichungen (2) und (5) bezeichnet werden. Mit diesen Anfangsbedingungen ergibt sich

$$P(x_0, 0) = \int dx P(x, T) P^*(x, T; x_0) \tag{6}$$

wobei in Gleichung (4)  $T_1 = 0$  und  $T_2 = T$  gesetzt wird, ohne das die Allgemeinheit der Formel beeinträchtigt wird.

Die Schätzung der Option erfolgt nunmehr mittels eines adjungierten Prozesses. Es wird vorausgesetzt, dass der Preis einer europäischen Option durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{eu}(S, t) = \mathcal{L} P_{eu}(S, t). \quad (7)$$

In dem Modell von Black & Scholes und Merton ist beispielsweise  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{BS}$  der Black-Scholes-Operator für einen risikolosen Zinssatz  $r$  und einer zugrundeliegenden Volatilität  $\sigma$ , der gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{BS} := -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} - rS \frac{\partial}{\partial S} + r. \quad (8)$$

Aus dem Vorzeichen des Diffusionsteils  $-\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial^2/\partial S^2$  des Operators ist ersichtlich, dass die Gleichung rückwärts in der Zeit gerechnet wird: Die Endbedingungen für eine Put-Option an ihrem Fälligkeitstag  $T$  ist

$$P_{eu}(S, T) = \max(S - E, 0) =: F(S), \quad (9)$$

wobei  $E$  der Basispreis der Option ist. Mit dem entsprechenden adjungierten Prozess  $P^*$ , der durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P^* &= -\mathcal{L}^* P^* \\ P^*(x, 0; S) &= \delta(x - S) \end{aligned} \quad (10)$$

gegeben ist und Gleichung (6) erhält man

$$\begin{aligned} P_{eu}(S, 0) &= \int dx P_{eu}(x, T) P^*(x, T; S) \\ &= \int dx P^*(x, T; S) F(x) \\ &= \int dx P^*(x, T; S) \max(x - E, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

wodurch der Preis einer Option zum gewärtigen Zeitpunkt  $t = 0$  und gewärtigen Preis  $S$  in den zugrundeliegenden Bedingungen des adjungierten Prozesses ausgedrückt

werden kann. Im Black-Scholes-Modell entspricht dies der Optionspreisberechnungsformel, die den Preis als diskontierten Erwartungswert eines Profits bei einer risiko-neutralen Maßgabe bestimmt.

Der adjungierte Prozess wird nunmehr auf die Schätzung von amerikanischen Optionen angewandt. Für amerikanische Optionen beinhaltet die Preisfindung bei jedem Zeitschritt eine Entscheidung, ob die Option ausgeübt werden soll oder nicht. Dies macht die Dynamik des Prozesses komplizierter und verschiedene Herangehensweisen sind hergeleitet worden, um diese Dynamik zu modellieren, beispielsweise als Free-Boundary-, Linear-Complementarity- oder als Optimal-Stopping-Problem. Hierbei wird angenommen, dass für infinitesimale Zeitschritte  $dt$  die Zeitentwicklung des Optionspreises durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$P_{am}(x, t + dt) = \max(P_{am}(x, t) + \mathcal{L}P_{am}(x, t)dt, F(x, t + dt)) \quad (12)$$

wobei  $F(x, t)$  ist eine Payoff-Funktion, die den intrinsischen Wert der Option wiederspiegelt, der hier sowohl vom derzeitigen Status  $x$  des Basiswerts als auch der Zeit  $t$  abhängt. Diese Formulierung kann beispielsweise aus dem Black-Scholes-Modell als eine explizierte Diskretisierung des entsprechenden linearen Komplementärproblems, wie von Wilmott, Howison und Dewynne gezeigt, hergeleitet werden. Ähnliche Gleichungen können auch aus diskreten Zeitformulierungen, beispielsweise der Dynamic-Programming-Gleichung für binomische Bäume, hergeleitet werden.

Unter der Berücksichtigung von

$$\max(P_{am} + \mathcal{L}P_{am}dt, F) = P_{am} + \mathcal{L}P_{am}dt + \max(F - P_{am} - \mathcal{L}P_{am}dt, 0) \quad (13)$$

kann die Gleichung für  $dt \rightarrow 0$  umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{am} = \mathcal{L}P_{am} + \mathcal{J}(F, P_{am}, t) \quad (14)$$

mit einem Quellterm

$$\mathcal{J}(F, P_{am}, t) := \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\max(F - P_{am} - \mathcal{L}P_{am}dt, 0)}{dt} \quad (15)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Quellenterm nur in dem Gebiet der Ausübung nicht verschwindet. In dem Gebiet der Ausübung gilt jedenfalls  $P_{am}(x, t) = F(x, t)$ , wodurch folgendes erhalten wird:

$$\mathcal{J}(F, P_{am}, t) := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F - \mathcal{L}F & : x \text{ in exercise region} \\ 0 & : x \text{ outside of exercise region} \end{cases} \quad (16)$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) könnte auch ohne numerische Simulationen bestimmt werden, ob die amerikanische Option sich von der europäischen Option unterscheidet. Dies wäre insbesondere dann möglich, wenn gilt, dass  $(F - P_{am} - \mathcal{L}P_{am}dt)$  und/oder  $(\partial/\partial t F - \mathcal{L}F) \leq 0$  ist. In diesem Fall verschwindet der Quellterm  $\mathcal{J}(F, P_{am}, t)$ , woraus folgt, dass sich die beiden Systeme im Wesentlichen identisch verhalten. Ein Ausführungsbeispiel für diesen Fall ist eine amerikanische Standard-Put-Option auf Aktien ohne Dividende im Black-Scholes-Modell.

Hierbei ist besonders vorteilhaft, dass numerischer Aufwand vermieden werden könnte, da man nunmehr den leichter zu ermittelnden Preis der europäischen Option ermitteln könnte. Außerdem könnten somit gezielt Produkte geschaffen werden, die sich im Wesentlichen wie eine europäische oder amerikanische Option verhalten. Durch die Wahl der Payoff-Funktion  $F$  lässt sich das Verhalten der Option derart beeinflussen, dass  $\mathcal{J}(F, P_{am}, t)$  nicht negativ oder nicht positiv wird. Eine frühzeitige Ausübungsmöglichkeit könnte für beide Seiten insbesondere dann vorteilhaft sein, wenn dem Anbieter bekannt ist, ob eine Option ohne oder mit nur geringem Risiko-aufschlag als amerikanisch angeboten werden kann.

Es wird nun der adjungierte Prozess  $P^*$  wie in Gleichung (2) mit  $\mathcal{L}$  der Gleichung (12) definiert, das heißt anders als  $P_{am}$ , wird der adjungierte Prozess wie bei einer europäischen Dynamik bestimmt. Wird die Berechnung der europäischen Optionen wiederholt und wird angenommen, dass die derzeitige Zeit Null und die Ausübungzeit  $T$  ist, so gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit,

$$\begin{aligned}
 & \int dx \left( P_{am}(x, T) P^*(x, T) - P_{am}(x, 0) P^*(x, 0) \right) \\
 &= \int_0^T dt \int dx \frac{\partial}{\partial t} \left( P_{am}(x, t) P^*(x, t) \right) \\
 &= \int_0^T dt \int dx \left( P^*(x, t) \frac{\partial}{\partial t} P_{am}(x, t) + P_{am}(x, t) \frac{\partial}{\partial t} P^*(x, t) \right) \\
 &= \int_0^T dt \int dx \left( P^*(x, t) \mathcal{L} P_{am}(x, t) - P_{am}(x, t) \mathcal{L}^* P^*(x, t) + \mathcal{J}(F, P, t) P^*(x, t) \right) \\
 &= 0 + \int_0^T dt \int dx \mathcal{J}(F, P_{am}, t) P^*(x, t)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Aus der Gleichung (11) ist bekannt, dass in Gleichung (17) das Integral  $\int dx P_{am}(x, T) P^*(x, T) = \int dx F(x, T) P^*(x, T)$  gleich dem europäischen Optionspreis  $P_{eu}$  ist. Gilt nun  $P^*(x, 0) = \delta(x - S)$  als Anfangsbedingung des adjungierten Prozesses, erhält man aus Gleichung (17)

$$P_{am}(S, 0) = P_{eu}(S, 0) + \int_0^T dt \int dx \mathcal{J}(F, P_{am}, t) P^*(x, t; S). \tag{18}$$

wodurch der frühe Ausübungsoptionspreis in Form eines Integrals über den Fehlpreis-Quellterm  $\mathcal{J}$  ausgedrückt wird, der durch den adjungierten Prozess  $P^*$  gewichtet wird.

Unter Verwendung der Gleichung (16), kann Gleichung (18) weiter vereinfacht werden zu:

$$P_{am} = P_{eu} + \int_0^T dt \int_{\Omega(t)} dx P^*(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L} \right) F(x, t) \tag{19}$$

wobei  $\Omega(t)$  das Gebiet der Ausübung zum Zeitpunkt  $t$  ist.

Gleichung (16) ist hierbei ein Generalisierung der Integralgleichungen, die von Kim, Jacka, Carr, Jarrow und Myeni für das Black-Scholes-Modell mit einem einzigen Basiswert hergeleitet worden sind. Diese Formel könnte beispielsweise – wie später noch dargestellt wird – für semi-analytische Methoden benutzt werden, um eine Ausübungsgrenze zu finden. Es gilt hierbei, dass im Black-Scholes-Modell die Gleichung

(19) unter bestimmten Voraussetzungen die Zerlegungsformel ergibt, die in diesen Arbeiten hergeleitet wird.

Die numerische Verwendung der APC-Methode in einer Finite-Differenzen-Methode wird im Folgenden erläutert. Es wird dabei von der Zerlegung in den Gleichungen (18) und (19) als ein Werkzeug ausgegangen, das die numerischen Methoden zur Lösung des Problems der Schätzung von amerikanischen Optionen verbessert.

Es sind drei Eigenschaften, die diese Gleichung für die numerische Bestimmung von Optionspreisen interessant machen:

1. Der Quellterm ist nur in dem Gebiet der Ausübung von Null verschieden. In diesem Gebiet ist auch die genaue Lösung bekannt, da sie gleich der Payoff-Funktion  $F$  ist. Daher kann der Quellterm mit einer hohen Genauigkeit entweder numerisch oder analytisch berechnet werden.
2. Wenn der adjungierte Prozess analytisch bestimmt werden kann, kann der Beitrag dieser Quellen zur Optionspreiskorrektur mit einer genauen Transferfunktion  $P^*(S, T; S_0)$  zu  $S_0$  propagiert werden.
3. Bei der Monte-Carlo-Methode glättet das Doppelintegral Fluktuationen in den lokalen Preisschätzungen.

Die Gleichungen (18) und (19) könnten zudem dazu verwendet werden, die Preis- schätzung einer einfachen expliziten Finite-Differenz-Methode zu verbessern. Zur Verdeutlichung wird ein Black-Scholes-Operator der Gleichung (8) verwendet. Das Einsetzen von

$$\begin{aligned} x &= \ln \frac{S}{E} \\ \tau &= \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) \\ P &= E e^{\alpha x + \beta t} p(x, \tau) \end{aligned} \tag{20}$$

mit  $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$ ,  $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ ,  $k = 2r/\sigma^2$  transformiert die Black-Scholes-Gleichung in eine selbst-adjungierte Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (21)$$

welche numerisch sehr viel einfacher zu lösen ist. Die Payoff-Funktion  $F(S) = \max(E - S, 0)$  wird zu folgender Gleichung transformiert:

$$f(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)^2 \tau} \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0) \quad (22)$$

und die Anfangsbedingungen sind

$$p(x, 0) = f(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0). \quad (23)$$

Die Randbedingungen können nunmehr wie folgt hergeleitet werden:

$$P(0, t) = E e^{-r(T-t)} \quad (24)$$

$$P(S, t) \rightarrow 0 \quad \text{for } S \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Zur Verdeutlichung der APC-Methode im Finite-Differenz-Schema wird eine explizite Finite-Differenz-Diskretisierung der Gleichung (21) mit einem normalen Gitter  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ,  $x_n = x_0 + n\delta x$  und mit einem konstanten Zeitschritt  $\delta t$  verwendet. Mit der Definition  $p_n^m := p(x_n, m\delta t)$  ergibt sich die Diskretisierung für eine europäische Put-Option aus

$$\frac{p_n^{m+1} - p_n^m}{\delta t} + O(\delta t) = \frac{p_{n+1}^m - 2p_n^m + p_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2) \quad (26)$$

Vernachlässigt man die Terme der Order  $O(\delta t)$  und  $O((\delta t)^2)$  erhält man die Differenzengleichung

$$p_n^{m+1} = \alpha p_{n+1}^m + (1 - 2\alpha)p_n^m + \alpha p_{n-1}^m \quad (27)$$

wobei

$$\alpha = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \quad (28)$$

gilt. Es ist hierbei bekannt, dass diese Update-Methode stabil für  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  ist.

Für eine amerikanische Option muss die Gleichung (27) durch folgende Gleichung ersetzt werden:

$$p_n^{m+1} = \max(\alpha p_{n+1}^m + (1 - 2\alpha)p_n^m + \alpha p_{n-1}^m, f_n^{m+1}) \quad (29)$$

wobei  $f_n^m = f(x_0 + n\delta x, m\delta t)$  die diskretisierte Payoff-Funktion ist. Die Anfangs- und Grenzgleichungen sind durch die Gleichungen (23) bis (25) bestimmt.

Aufgrund adjungierter Prozesskorrekturen im Finite-Differenz-Schema wird die Gleichung (16) zur Berechnung des frühen Ausübungspreises als Zusatz zu der Finiten-Differenz-Methode verwendet. Gleichung (21) liegt in selbst-adjungierter Form vor, so dass

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (30)$$

gilt. Die Lösung des in Gleichung (10) definierten adjungierten Problems ist

$$p^*(x, \tau; x_0) = e^{-(x-x_0)^2/(2\tau)} \quad (31)$$

wobei  $x_0 := \ln(S_0/E)$  und  $S_0$  der Preis des zu ermittelnden Basiswerts ist, das heißt in den meisten Fällen der derzeitige Preis.

Der Ausübungspreis  $P_{am} - P_{eu}$  könnte dann durch die Aufsummierung von  $\max(F - P_{am} - \mathcal{L}P_{am}(dt, 0))$  an jedem Gitterpunkt und bei jedem Zeitschritt berechnet werden.

Fig. 1 zeigt die Abhängigkeit einer amerikanischen Option bei einem risikolosen Zinssatz  $r = 0,1$ , der Volatilität  $\sigma = 0,4$  und dem Ausübungspreis  $E = \$ 10$ , wobei die Option in sechs Monaten abläuft und sie auf einem groben Gitter mit der expliziten Finite-Differenz-Methode (50 Gitterpunkte) berechnet worden ist. Fig. 1 zeigt ferner

auf dem gleichen Gitter die Abhängigkeit einer amerikanischen Option durch den adjungierten Prozesskorrekturterm, der zum europäischen Preis addiert wird. (50 Gitterpunkte, APC-Methode), Fig. 1 zeigt zudem eine Referenzlösung, die durch ein Crank-Nicolson-Schema auf einem feinen Gitter berechnet ist, und den entsprechenden Preis der europäischen Option.

Die Ergebnisse für eine Simulation auf einem groben Gitter sind in Fig. 1 gezeigt. Offensichtlich enthält man erheblich bessere Schätzungen des amerikanischen Optionspreises, wenn der Preis durch das Addieren des frühen Ausbuhspreises, der mittels der Gleichung (18) berechnet wird, zu dem europäischen Optionspreis erfolgt, als bei der direkten Berechnung mittels der Finiten-Differenz-Methode, obwohl bei beiden Methoden das selbe Gitter verwendet wird und die Summierung der gewichteten Quellenterme nur einen geringen Rechenaufwand bedarf. Weiterhin ist ersichtlich, dass die verknüpfte Prozesskorrektur eine glatte Schätzung über dem gesamten Intervall ergibt, während die Finite-Differenz-Methode zwischen den Gitterpunkten eine Interpolationsmethode verwendet.

Um die Verwendung der Gleichung (15) für Monte-Carlo-Methoden – das heißt die Schätzung von amerikanischen Optionen durch die stochastische Simulation – zu zeigen, wird sie auf die stochastische Simulation einer Mastergleichung angewendet. Dies ist ein numerischer Ansatz, der viele Anwendungen in der Physik hat, um eine Mastergleichung zu lösen, die eine Zeitentwicklung einer Wahrscheinlichkeit  $P_n$  beschreibt das System im Zustand  $n$  zu finden:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \sum_m R_{nm} P_m - \sum_m R_{mn} P_n \quad (32)$$

wobei  $R_{nm}$  die Übergangsrate für den Übergang des Systems vom Zustand  $m$  in den Zustand  $n$  ist. Die Gleichung (32) muss hierbei als ein System von ordentlichen Differentialgleichungen für alle Zustände gelesen werden.

Wiederum wird die Anwendung der adjungierten Prozesskorrektur in einem Black-Scholes-Modell gezeigt. Auf jeden Fall ist dieser Ansatz nicht auf dieses Modell limitiert und Effekte wie die stochastische Volatilität und Sprungprozesse können auch in einfacher Art und Weise in die Mastergleichung integriert werden.

Trotz ihrer Flexibilität und Einfachheit ist die stochastische Simulation keine Standardmethode, die in der Finanzmathematik verwendet wird. Faller und Petruccione haben einen Mastergleichungsansatz für die Optionspreisschätzung präsentiert, der sich allerdings in wichtigen Punkten von der hier gezeigten Methode unterscheidet, beispielsweise da diese konstante Zeitschritte verwenden. Der stochastische Simulationsansatz von Faller und Petruccione ist zwar schneller als die Standard-Monte-Carlo-Methoden, aber nicht so effektiv wie der hier gezeigte Ansatz.

Nunmehr wird die Verwendung der Minimal-Prozess-Methode erläutert. Die Idee hinter der Minimal-Prozess-Methode ist es, einen einfachen Markov-Prozess zu erstellen, dessen Zustandswahrscheinlichkeiten der Mastergleichung (32) gehorchen. Wenn eine Darstellung der Zustände gefunden ist, dann arbeitet der Algorithmus wie folgt:

1. Auswahl eines Anfangszustands  $n$  gemäß den Anfangsbedingungen.
2. Aufaddieren der Übergangsichten für alle Zustände  $m$ , die vom Zustand  $n$  in einem einzigen Übergang erreicht werden können:  $R_{tot} = \sum_m R_{mn}$ .
3. Vorschreiten in der Zeit um ein Zeitinkrement  $\tau$ , das aus einer Exponentialverteilung erhalten wird und das Mittel  $r_{tot}$  aufweist, das heißt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\pi(\tau) = R_{tot}^{-1} \exp(-R_{tot}\tau)$ .
4. Auswahl eines neuen Zustands  $m$  aus allen möglichen Zuständen mit der Wahrscheinlichkeit  $R_{mn}/R_{tot}$ .
5. Durchführen des Übergangs zu dem ausgewählten Zustand  $m$ , das heißt es wird  $n = m$  gesetzt
6. Gehe zu Schritt 2 bis die zunehmende Zeit größer oder gleich der gewünschten Simulationszeit ist.

Der zeitaufwendigste Teil dieses Algorithmus ist der Schritt 4, die Auswahl des wirklichen Übergangs, da die Nummer der Endzustände, die von  $m$  aus erreicht werden kann, sehr groß werden kann. Bei dem folgenden Beispiel ist es  $O(N)$ , wobei  $N$  der Anzahl der verwendeten Gitterpunkte entspricht. Ein linearer Auswahlalgorithmus würde demnach auch  $O(N)$  sein. Hier wird, um den Auswahlprozess zu beschleunigen, der „Dual-Logarithmic-Classes“-Ansatz von Fricke und Schnakenberg benutzt, bei dem alle möglichen Übergänge in Reaktionskategorien organisiert werden. Innerhalb einer Kategorie variiert die Übergangsrate hierbei nur höchstens um einen Faktor Zwei, so dass Übergänge sehr effizient durch ein von-Neumann-Verwerfungsschema ausgewählt werden, wenn die Reaktionskategorie einmal gewählt ist. Die Anzahl der Reaktionskategorien ist hierbei klein (die Anzahl von Oktaaven, die durch die minimale und maximale Übergangsrate aufgespannt wird), so dass nur wenige Schritte benötigt werden, um eine Reaktionskategorie mit der Wahrscheinlichkeit  $R_c/R_{tot}$  durch lineare Selektion auszuwählen, wobei  $R_c$  die Summe aller Übergangsraten in der Kategorie  $c$  ist.

Der Einfachheit halber könnte – als Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung durch eine Mastergleichung – im Folgenden wieder die Diffusionsgleichung verwendet werden, das heißt die in eine selbst-adjungierte Form transformierte Black-Scholes-Gleichung.

Der Prozess wird unter folgenden Annahmen diskretisiert:

1. Es wird eine äquidistante Diskretisierung des Logarithmus' des Preises des Basiswerts vorgenommen von  $x_0 = x_{min}$  bis  $x_N = x_{max}$  mit  $x_i - x_{i-1} = \Delta x$  für  $i = 1, \dots, N$ .
2. Die Zustände sind für jeden Raum  $[x_i, x_{i+1})$  konstante Sprungfunktionen – wie in Fig. 2 dargestellt, welche die Diskretisierung des Preises des Basiswerts und die zugelassenen Übergänge für einen Zustand zeigt.
3. Für jeden Raum wird ein Sprung eines Quasi-Teilchens zu seinem nächsten linken oder rechten Nachbar zugelassen. Das Teilchen trägt einen fest definierten Anteil  $\Delta p$  des Optionspreises, so dass beispielsweise nach einem Sprung von  $i$  zu  $i - 1$ , die

aktualisierten Preise  $p(i, t) = p(i, t - \tau) - \Delta p$  und  $p(i - 1, t) = p(i - 1, t - \tau) + \Delta p$  für eine europäische Option und  $p(i, t) = \max(p(i, t - \tau) - \Delta p, f(i, t))$  und  $\max(p(i - 1, t) = p(i - 1, t - \tau) + \Delta p, f(i, t))$  für eine amerikanische Option betragen.

Offensichtlich beschreibt dies einen zufälligen eindimensionalen Weg für jedes Quasi-Teilchen. Demnach unterliegt die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gruppe von Quasi-Teilchen einer Diffusionsgleichung mit der Grenze  $\Delta x \rightarrow 0$ . In der selbst-adjungierten Form der Gleichung (21) ist der Diffusionskoeffizient gleich Eins, so dass die Übergangsrate für einen Sprungprozess von einem Quasi-Teilchen von  $i$  zu  $i \pm 1$  unabhängig von  $i$  auf

$$r = 1/\Delta x^2 \quad (33)$$

gesetzt wird.

Die Effizienz der stochastischen Simulation könnte ferner durch die Einführung von Nettoübergangsraten verbessert werden. Die Anzahl von Quasi-Teilchen im Raum  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  ist  $N_i = p(i, t) / \Delta p$ . Demnach ergibt sich aus der Mittlung aller Übergänge, die am derzeitigen Zustand beginnen, dass der Nettotransfer der Quasi-Teilchen vom Knoten  $i$  zu  $i \pm 1$  sich aus

$$j_i = \begin{cases} r(N_i - N_{i-1})(\tau) & : N_i > N_{i \pm 1} \\ 0 & : N_i \leq N_{i \pm 1} \end{cases} \quad (34)$$

ergibt, wobei  $\tau$  die durchschnittliche Größe des Zeitschritts ist und dies dadurch berücksichtigt wird, dass die Nettoübergangsraten für jeden Sprung auf jeden Raum eingeführt wird.

$$r(i|i \pm 1) = \begin{cases} r(N_i - N_{i-1}) & : N_i > N_{i \pm 1} \\ 0 & : N_i \leq N_{i \pm 1} \end{cases} \quad (35)$$

Diese Nettoübergangsraten zu verwenden, hat zwei besondere Vorteile. Zum einen werden die Bewegungen der Belegungszahlen in den Räumen, das heißt in den Preisschätzungen, stark reduziert. Zum anderen ist die Summe über die Nettoübergangsraten weitaus geringer als die Summe über die Übergangsraten der Quasi-

Teilchen. Da die typischen Zeitschritte umgekehrt proportional zu der Gesamtübergangsrate ist, bedeutet dies, dass die Simulation deutlich schneller beendet wird.

Fig. 3 Der Preis einer amerikanischen Put-Option wird auf einen groben Gitter mittels einer kleinen Anzahl von Übergängen (MC30) berechnet und durch Hinzufügen der adjungierten Prozesskorrektur in der gleichen Simulation der europäische Optionspreis (APC) geschätzt. Die Volatilität in diesem Beispiel ist  $\sigma = 0,4$ , der Zinssatz  $r = 0,1$  und der Ausübungspreis  $E = \$10$ .

Als Beispiel für ein numerisches Experiment zeigt Fig. 3 die Ergebnisse einer Schätzung für eine amerikanische Option, bei der ein sehr grobes Gitter mit 30 Gitterpunkten verwendet wird und 600 Übergänge in einer einzelnen Realisierung des stochastischen Prozesses durchgeführt werden. Die Optionspreise, die durch eine Rückwärtssimulation geschätzt werden, sind praktisch wertlos: bei manchen Gitterpunkten liegt der vorhergesagte amerikanische Preis unter dem europäischen Preis, was unmöglich ist. Die APC Methode basiert auf der gleichen Simulation und liefert dagegen bei nur gering erhöhtem Rechenaufwand sehr gute Schätzungen des wirklichen amerikanischen Optionspreises.

Abschließend und zusammenfassend ist festzustellen, dass der frühe Ausübungspreis für eine amerikanische Option durch eine kompakte Formel dargestellt werden kann, in dem von einem adjungierten Prozess Gebrauch gemacht wird, der sich in der rückwärtsgerichteten Zeitrichtung des Originalprozesses entwickelt, wobei die Entwicklung des entsprechenden europäischen Optionspreises bestimmt wird. Diese Formel generalisiert in erfinderischer Weise eine Integralgleichung, die im Black-Scholes-Modell gültig ist und die in der Literatur dazu verwendet wird, semi-analytische Methoden zur Schätzung von amerikanischen Optionen abzuleiten.

Es wird gezeigt, dass die Formel als Zusatz für numerische Standardmethoden verwendet werden kann, um entscheidend bessere Schätzungen des frühen Ausübungspreises zu erhalten. Dies wird am Beispiel des Black-Scholes-Modells für eine Finite-Differenz-Methode gezeigt. Um den Gebrauch der Formel für Monte-Carlo-Methoden zu zeigen, wird eine stochastische Simulation, die auf einer Mastergleichungsdarstellung des Prozesses basiert, eingeführt. Auch für sehr grobe Annähe-

rungen mit schlechten Statistiken kann so eine hinreichend gute Schätzung des frühen Ausübungspreises erhalten werden. Der Grund für die gute Leistung ist, dass es die Formel erlaubt, eine analytische oder semi-analytische Propagation des Quellterms durchzuführen, der in dem Ausübungsgebiet generiert wird. Demnach liegt die größte Ursache für numerische Fehler in der Unsicherheit des Ortes der Ausübungsgrenze.

Offensichtlich kann der adjungierte Prozess auch dazu benutzt werden, um neue semi-analytische und numerische Methoden zu entwickeln. Wenn man beispielsweise eine Anfangsschätzung der Ausübungsgrenze hat, kann die stochastische Simulationsmethode derart verändert werden, dass ohne Diskretisierung in dem Ausübungsgebiet gearbeitet werden kann, da die Preise und damit die Übergangsraten dort analytisch bekannt sind. In den folgenden Gebieten, können die Werte durch die Aufsummierung der adjungierten Prozesskorrekturen über das Ausübungsgebiet berechnet werden, so dass bei einer selbstkonsistenten Berechnung, eine sehr grobe Diskretisierung um die Grenze ausreicht. In Kombination mit der Tatsache, dass durch einen adjungierten Prozess erhaltene Schätzungen auch bei sehr groben Gittern verwendbar sind, folgt hieraus, dass die Methode auch sehr gut bei der Schätzung von Optionen mit mehreren Basiswerten verwendet werden kann.

Schließlich eröffnet der adjungierte Prozess eine besonders gute Möglichkeit, Preise, die auch groben Gittern berechnet sind, zu interpolieren und zu extrapolieren.

In der Literatur ist folgende explizite Zerlegung des Preises einer amerikanischen Put-Option in den europäischen Preis und den frühen Ausübungspreis im Black-Scholes-Modell bekannt:

$$P_{am}^{BS}(S_0, 0) = P_{eu}^{BS}(S_0, 0) + rE \int_0^T e^{-rt} N \left( \frac{\ln B_t/S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) dt \quad (36)$$

wobei  $B_t$  der Ort der Ausübungsgrenze zum Zeitpunkt  $t$  ist und es gilt

$$N(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (37)$$

Dies ist ein spezieller Fall der Gleichung (19), denn bei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{BS}$  aus Gleichung (8) ergibt sich der adjungierte Operator aus

$$\mathcal{L}_{BS}^* = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r - \frac{3}{2}\sigma^2)S \frac{\partial}{\partial S} + 2r - \sigma^2 \quad (38)$$

wie dies durch die partielle Integration in der bestimmenden Gleichung des adjungierten Operators gezeigt werden kann, siehe Gleichung (3). Der adjungierte Operator ist hierbei nicht mit dem Black-Scholes-Operator identisch, hat aber einen ähnlichen Aufbau. Das adjungierte Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P^* &= -\mathcal{L}_{BS}^* P^* \\ P^*(S, 0; S_0) &= \delta(S - S_0) \end{aligned} \quad (39)$$

kann analytisch durch die gleichen Methoden gelöst werden, die zur Herleitung der Black-Scholes-Formel benutzt werden, wobei wesentlich einfachere Anfangsbedingungen verwendet werden können. Das Ergebnis ist:

$$P^*(S, t; S_0) = S_0^{-1} \exp\left(-\frac{(\ln S - \ln S_0 - (r - 3/2\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \frac{e^{-(2r - \sigma^2)t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}. \quad (40)$$

Die Payoff-Funktion einer amerikanischen Put-Option ist

$$F(S, t) = F(S) = \max(E - S, 0) \quad (41)$$

so dass innerhalb des Ausübungsgebiets gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{BS}\right) F(S, t) = rE \quad (42)$$

Das Ausübungsgebiet ist in diesem Fall das Intervall  $\Omega(t) = [0, B_t]$  und aus Gleichung (19) folgt, dass

$$\begin{aligned} P_{am}^{BS}(S_0, 0) &= P_{eu}^{BS}(S_0, 0) + \\ &\int_0^T dt \int_0^{B_t} dS \frac{rE}{S_0} \exp\left(-\frac{(\ln S - \ln S_0 - (r - 3/2\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \frac{e^{-(2r - \sigma^2)t}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Durch die Substitution  $\xi = \ln S/S_0$  und quadratische Ergänzung im resultierenden Exponentialargument kann dies in die Form der Gleichung (36) gebracht werden.

Hinsichtlich weiterer vorteilhafter Ausgestaltungen und Weiterbildungen des erfundungsgemäßen Verfahrens wird zur Vermeidung von Wiederholungen auf die allgemeine Beschreibung sowie auf die beigefügten Patentansprüche verwiesen.

Schließlich sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die voranstehend beschriebenen Ausführungsbeispiele lediglich zur Erörterung der beanspruchten Lehre dienen, diese jedoch nicht auf die Ausführungsbeispiele einschränken.

## P a t e n t a n s p r ü c h e

1. Verfahren zur Bestimmung der, insbesondere zukünftigen, Position eines Objekts, insbesondere eines Teilchens oder dergleichen, wobei der Positionsverlauf eines Referenzobjekts bestimmt wird, wobei das Referenzobjekt einen Prozess durchläuft und wobei die Differenzen der Positionen des Objekts und des Differenzobjekts gebildet werden,  
dadurch gekennzeichnet, dass aus den Differenzen Fehlpositionsterme gebildet werden und dass die Fehlpositionsterme mit mindestens einem Korrekturfaktor gewichtet werden.
2. Verfahren nach Anspruch 1, dadurch gekennzeichnet, dass die mit dem Korrekturfaktor gewichteten Fehlpositionsterme aufaddiert werden.
3. Verfahren nach Anspruch 2, dadurch gekennzeichnet der Korrekturfaktor durch einen adjungierten Prozess berechnet wird.
4. Verfahren nach Anspruch 3, dadurch gekennzeichnet, dass der adjungierte Prozess in entgegengesetzter Zeitrichtung des Prozesses des Referenzobjekts verläuft.
5. Verfahren nach Anspruch 4, dadurch gekennzeichnet, dass zur Bestimmung der Position des Objekts die gewichteten und aufsummierten Fehlpositionsterme zu der Position des Referenzobjekts addiert wird.

Fig. 1

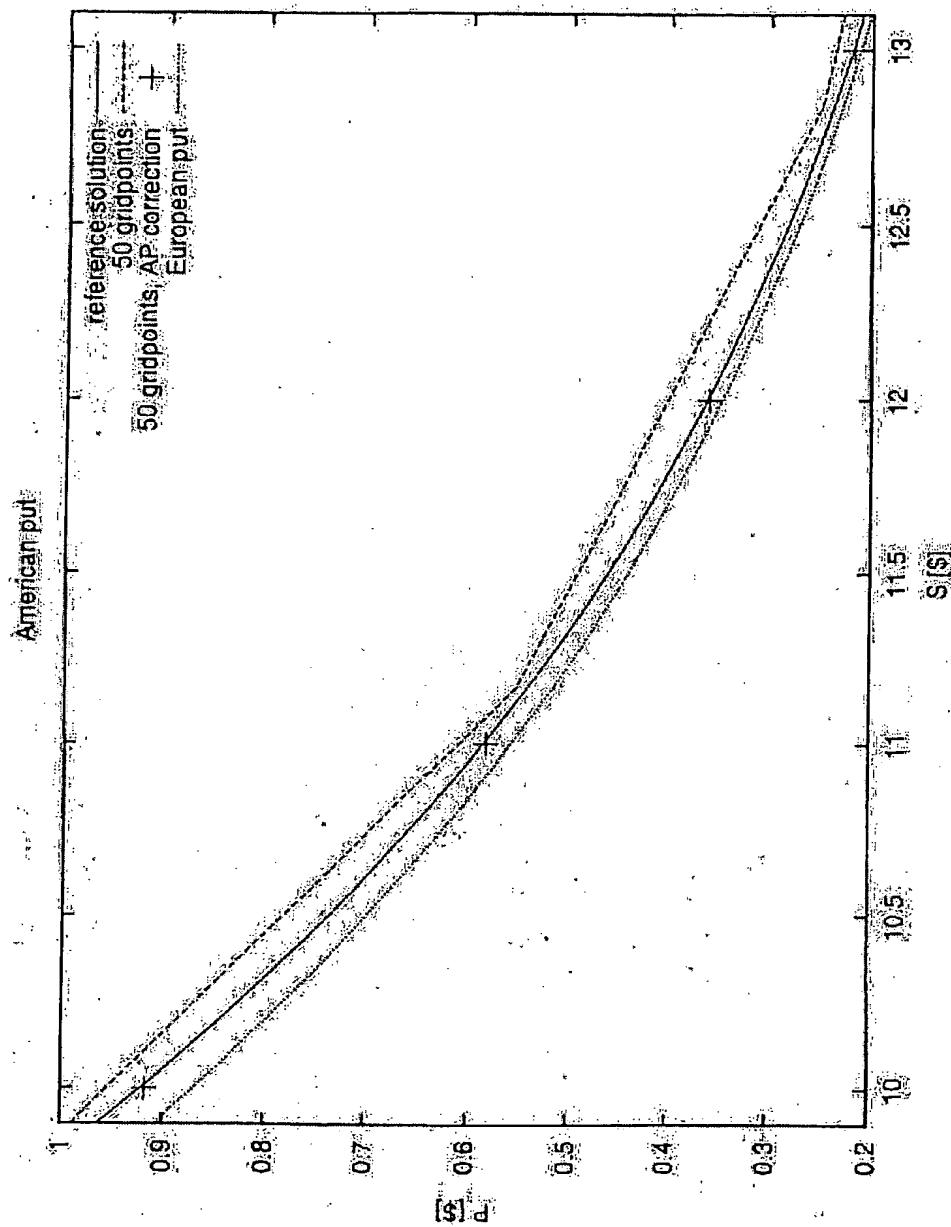


Fig. 2

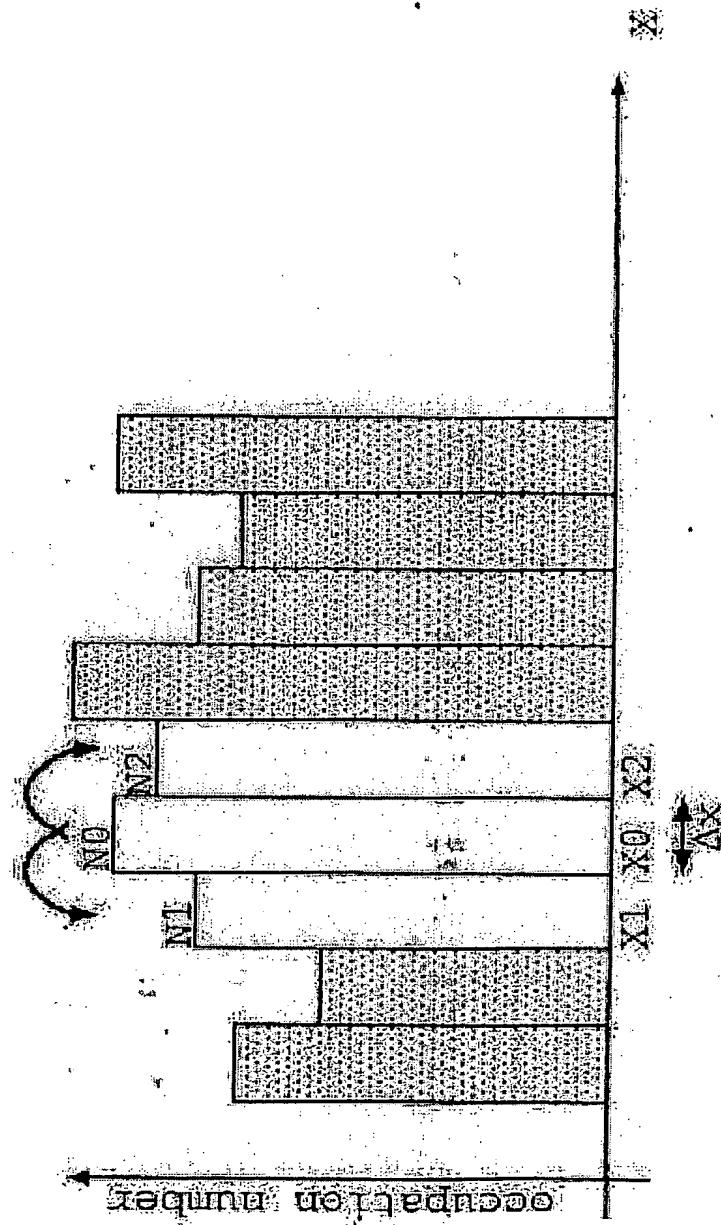
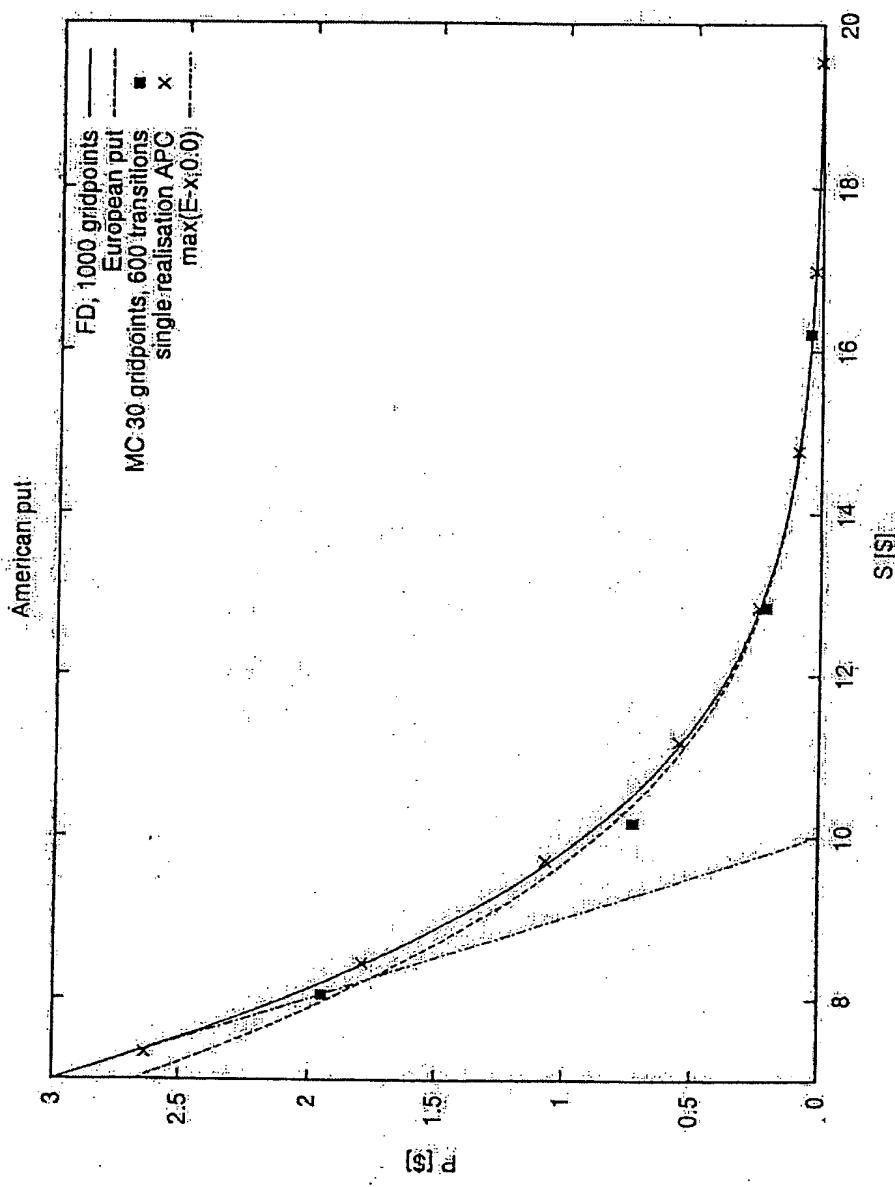


Fig. 3



## Z u s a m m e n f a s s u n g

Ein Verfahren zur Bestimmung der, insbesondere zukünftigen, Position eines Objekts, insbesondere eines Teilchens oder dergleichen, wobei der Positionsverlauf eines Referenzobjekts bestimmt wird, wobei das Referenzobjekt einen Prozess durchläuft und wobei die Differenzen der Positionen des Objekts und des Differenzobjekts gebildet werden ist im Hinblick auf eine gute Bestimmung der Position des Objekts bei gleichzeitig möglichst geringem technischem Aufwand derart ausgebildet, dass aus den Differenzen Fehlpositionsterme gebildet werden und dass die Fehlpositionsterme mit mindestens einem Korrekturfaktor gewichtet werden.

(Fig. 1)

Fig. 1

